

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: Toán

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, chuyên Tin)

Ngày thi: 29/6/2013

Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian giao đề)

(Đề thi này có 01 trang)

Chữ ký GT 1:

.....

Chữ ký GT 2:

.....

Câu I. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + 13}{x + 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Tìm số nguyên dương n để $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ là số nguyên tố.

Câu II. (1,5 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = mx + 2$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung.

b) Giả sử đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tìm giá trị của m để $|y_1 - y_2| = \sqrt{24 - x_2^2 - mx_1}$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + 2x\sqrt{x + \frac{1}{x}} = 8x - 1$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 8xy = 2 \\ x = 2y + 4xy \end{cases}$$

Câu IV. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định, đường kính CD thay đổi ($CD \neq AB$). Các tia BC, BD cắt tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lần lượt ở E, F.

a) Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp.

b) Khi đường kính CD thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của EF theo R.

c) Đường tròn đi qua ba điểm O, D, F và đường tròn đi qua ba điểm O, C, E cắt nhau ở G ($G \neq O$). Chứng minh ba điểm B, A, G thẳng hàng.

Câu V. (1,0 điểm)

Cho số thực x thỏa mãn $0 < x < 1$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

..... Hết

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

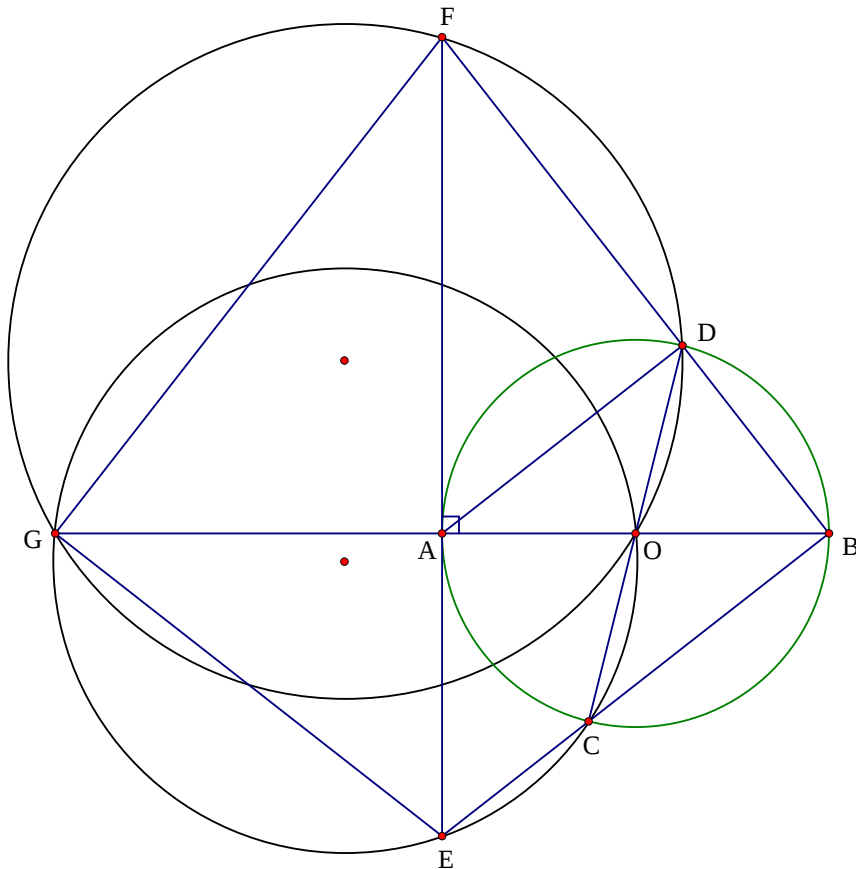
Môn: Toán
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, chuyên Tin)
(Hướng dẫn chấm này có 03 trang)

	Lời giải sơ lược	Cho điểm
Bài I 2,0 đ	1.a) $A = \frac{2\sqrt{x}+13}{x+5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+13}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$	0,25 đ
	$= \frac{(2\sqrt{x}+13) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{9-x}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}$	0,25 đ
	$= \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0,25 đ
	1.b) $A = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{5}{\sqrt{x}+2} - 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z}$	0,25 đ
	Có $\sqrt{x}+2 \geq 2 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 1$ hoặc $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2$	0,25 đ
	Từ đó tính được $x_1 = 9; x_2 = \frac{1}{4}$	
Bài II 1,5 đ	2) $p+1 = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow p = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$	0,25 đ
	Với $n = 2k$ (ĐK: $k > 0$) $\Rightarrow p = (k+1)(2k-1)$ nguyên tố mà $k+1 > 1 \Rightarrow 2k-1 = 1$ $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow n = 2; p = 2$ (thỏa mãn)	0,25 đ
	Với $n = 2k+1$ (ĐK: $k \geq 0$) $\Rightarrow p = k(2k+3)$ nguyên tố mà $2k+3 > 1 \Rightarrow k = 1$ $\Rightarrow n = 3, p = 5$ (thỏa mãn)	0,25 đ
	a) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình: $x^2 - mx - 2 = 0$.	0,25 đ
	Xét phương trình $x^2 - mx - 2 = 0$ có $1.(-2) = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu với mọi $m \Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung.	0,5 đ
	b) $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - 2 = 0$. Theo Viet $x_1 + x_2 = m; x_1 \cdot x_2 = -2$	0,25 đ
Bài II 1,5 đ	Tọa độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 2 \end{cases}$	
	Vậy: $ y_1 - y_2 = \sqrt{24 - x_2^2 - mx_1} \Leftrightarrow m(x_1 - x_2) = \sqrt{22 - m(x_1 + x_2)} = \sqrt{22 - m^2}$ (*)	0,25 đ
	ĐK: $m^2 \leq 22. (*) \Leftrightarrow m^2(x_1 - x_2)^2 = 22 - m^2 \Leftrightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 22 - m^2$ $\Leftrightarrow m^2(m^2 + 8) = 22 - m^2 \Leftrightarrow m^4 + 9m^2 - 22 = 0$	
	Đặt $m^2 = t$ (đk: $0 \leq t \leq 22$). Phương trình trở thành $t^2 + 9t - 22 = 0 \Rightarrow t_1 = -11$ (không thỏa mãn đk), $t_2 = 2$ thỏa mãn điều kiện $\Rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{2}$	0,25 đ

	Lời giải sơ lược	Cho điểm
Bài III 2,0 đ	1) ĐK: $x > 0$ Chia cả hai vế của phương trình cho $x > 0$ được: $x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x + \frac{1}{x}} - 8 = 0$	0,25 đ
	Đặt $\sqrt{x + \frac{1}{x}} = t$. Vì $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow t \geq \sqrt{2}$	0,25 đ
	Phương trình trở thành: $t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -4$ không thỏa mãn điều kiện, $t_2 = 2$ thỏa mãn điều kiện.	0,25 đ
	Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.	0,25 đ
	2) Trừ vế với vế của hai phương trình được: $x^2 + 4y^2 - 4xy - x + 2y - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2y)^2 - (x - 2y) - 2 = 0$.	0,25 đ
	Đặt $x - 2y = a$, phương trình trở thành: $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1; a_2 = 2$	0,25 đ
	Với $a = -1 \Rightarrow x - 2y = -1$, kết hợp với $x = 2y + 4xy$ ta được: $8y^2 - 4y + 1 = 0$ (Phương trình vô nghiệm) Với $a = 2 \Rightarrow x - 2y = 2$, kết hợp với $x = 2y + 4xy$ được: $4y^2 + 4y - 1 = 0$ $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.	0,5 đ
	Với $y_1 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}$. Với $y_2 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_2 = 1 + \sqrt{2}$	
	Vậy hệ có nghiệm: $\left(1 - \sqrt{2}; \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}\right); \left(1 + \sqrt{2}; \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right)$	
Bài IV 3,5 đ	a) $D \in (O; R) \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{AFB}$ (cùng phụ với $\widehat{DBA}$)	0,5 đ
	$\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{DB}$)	0,25 đ
	$\Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{DCB} \Rightarrow$ tứ giác CDFE nội tiếp.	0,25 đ
	b) $B \in$ đường tròn đường kính CD $\Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$. Xét tam giác EBF có $\widehat{EBF} = 1v$, $BA \perp EF \Rightarrow AE \cdot AF = AB^2$	0,25 đ
	$\Rightarrow EF = AE + AF \geq 2\sqrt{AE \cdot AF} = 2\sqrt{AB^2} = 2AB = 4R$ (BĐT Cô si)	0,5 đ
	Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $AE = AF = 2R \Leftrightarrow CD \perp AB$.	0,25 đ
	Vậy giá trị nhỏ nhất của EF là 4R khi $CD \perp AB$	0,25 đ
	c) Tứ giác ODFG nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GFD} + \widehat{GOD} = 180^\circ$, tứ giác OCEG nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GEC} + \widehat{GOC} = 180^\circ$, mà $\widehat{GOD} + \widehat{GOC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{GFD} + \widehat{GEC} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác BEGF nội tiếp.	0,5 đ
	Tứ giác BEGF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FGB} = \widehat{FEB}$. Tứ giác CDFE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{CDB}$. Tứ giác ODFG nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{FGO}$	0,5 đ
	$\Rightarrow \widehat{FGB} = \widehat{FGO} \Rightarrow G, O, B$ thẳng hàng hay B, A, G thẳng hàng.	0,25 đ

	Lời giải sơ lược	Cho điểm
Bài V 1,0 đ	$A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \left(\frac{2}{1-x} - 2 \right) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$	0,5 đ
	Áp dụng BĐT Cô si cho 2 số dương $\frac{2x}{1-x}$ và $\frac{1-x}{x}$ được: $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}$	0,25 đ
	Vậy $A \geq 3 + 2\sqrt{2}$	0,25 đ

Hình vẽ cho Bài IV:



Các chú ý khi chấm:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa. Trong các phần có liên quan với nhau, nếu học sinh làm sai phần trước thì phần sau liên quan với nó dù làm đúng cũng không cho điểm, trường hợp sai sót nhỏ có thể cho điểm nhưng phải trừ điểm chỗ sai đó. Không cho điểm lời giải bài hình nếu học sinh không vẽ hình.
- Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho Bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
- Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.

----- Hết -----